CAPITOLO 4

Semicontinuità forte-debole su spazi prodotto

In questo capitolo dimostriamo risultati di semicontinuità per funzionali del tipo $\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$ con $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$, (cfr. teoremi 4.3.4 e 4.4.1) particolarmente utili per dimostrare teoremi di esistenza in *teoria del controllo ottimale*: in tale contesto $\mathcal{F}[u,v]$ rappresenta il <u>costo totale da minimizzare</u> e si interpreta $\underline{u}$ come <u>stato del sistema</u> e $\underline{v}$ come la <u>funzione di controllo</u>, usualmente legate da una equazione differenziale.
Nei problemi classici del Calcolo delle Variazioni è $v = \nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^\nu$ con $\nu = n \times N$.

4.1. Risultati di De Giorgi e di Ioffe.

L'ipotesi (i) del teorema 3.3.1 di Morrey può essere indebolita. A tal fine premettiamo la seguente definizione.

Definizione 4.1.1. Diciamo che una funzione $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory se:

(i) $g(x,y)$ è misurabile in x per ogni $y \in \mathbb{R}^k$;
(ii) $g(x,y)$ è continua in y per q.o. $x \in \Omega$.

Il lemma che segue garantisce che i funzionali (integrali) variazionali che considereremo nel seguito sono ben definiti sugli spazi di Sobolev.

Lemma 4.1.2.
Sia $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Allora, per ogni funzione misurabile $w : \Omega \to \mathbb{R}^k$, la funzione composta

$$x \longmapsto g(x, w(x))$$

è misurabile in Ω.

Dim. Poiché w è misurabile esiste una successione di funzioni semplici s_j

$$s_j(x) = \sum_{i=1}^{l_j} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$$

dove λ_i $(i = 1, \ldots, l_j)$ sono numeri reali e χ_{A_i} sono le funzioni caratteristiche di $A_1, A_2, \cdots, A_{l_j}$ insiemi misurabili e disgiunti con $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{l_j} A_i = \Omega$, tale che $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} s_j(x) = w(x)$ q.o. in Ω.

Osservato che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in \Omega : \ g(x, s_j(x)) > a\} = \bigcup_{i=1}^{l_j} \{x \in A_i : \ g(x, \lambda_i) > a\}$$

è misurabile (essendo g misurabile in x), deduciamo che $g(x, s_j(x))$ è misurabile.

Poiché g è continua rispetto alla seconda variabile risulta

$$\lim_{j\to+\infty} g(x, s_j(x)) = g(x, w(x))$$

per q.o. $x \in \Omega$. Ne segue che $g(x, w(x))$ è misurabile (cfr. osservazione 1.1.6(iii)). □

4.2. Funzionali convessi e sequenziale debole semicontinuità inferiore.

Allo scopo di pervenire alla s.c.i. forte-debole in spazi prodotto (teorema 4.3.4) proviamo preliminarmente due proposizioni e facciamo delle considerazioni conseguenti (osservazione (4.2.3)).

Proposizione 4.2.1. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, y)$ è di Carathéodory.*

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \to y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.
Allora

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

(cioè, $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è seq. fortemente s.c.i. in $L^1\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$).

Dim. L'integrale $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è ben definito per il lemma 4.1.2. Sia $\{y_{h_j}\}$ una successione estratta da $\{y_h\}$ tale che

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega F(x, y_{h_j}(x))\, dx = \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx. \tag{4.36}$$

Poiché, ovviamente, $y_{h_j} \to y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ risulta, a meno di estratte, $y_{h_j}(x) \to y(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.
Per la continuità di $F(x, \cdot)$ si ha:

$$\lim_{j\to+\infty} F(x, y_{h_j}(x)) = F(x, y(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega. \tag{4.37}$$

Allora, per il lemma di Fatou (teorema 1.1.10), risulta:

$$\int_\Omega \liminf_{j\to+\infty} F(x, y_{h_j}(x))\, dx \le \liminf_{j\to+\infty}\int_\Omega F(x, y_{h_j}(x))\, dx$$

e quindi, da (4.37) e (4.36) segue

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

□

Proposizione 4.2.2. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x, y)$ è di Carathéodory;*
(ii) *$y \mapsto F(x, y)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$.*

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \rightharpoonup y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.
Allora

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega F(x, y_h(x))\, dx.$$

(cioè, $\displaystyle\int_\Omega F(x, y(x))\, dx$ è seq. deb. s.c.i. in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$).

Dim. Basta applicare il corollario 1.6.7 tenendo conto della proposizione 4.2.1. □

Osservazione 4.2.3. Nella precedente proposizione 4.2.2 si vede il ruolo svolto dalla convessità nel passaggio dalla topologia forte, proposizione 4.2.1, alla topologia debole.
Peraltro la convessità di $F(x, \cdot)$ si traduce, nel caso del funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx,$$

nella convessità di $F(x, u, v)$ nella coppia (u, v), che è ancora un'ipotesi troppo forte nelle applicazioni, per cui il risultato precedente è significativo nel caso in cui $F = F(x, v)$, cioè la Lagrangiana è indipendente da u.

D'altra parte, per il corollario 1.3.20 del teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov 1.3.16, la convergenza debole delle derivate implica la convergenza forte delle funzioni. Nel caso $v = \nabla u$, questo suggerisce che mentre da un lato, dovendo limitarci alla convergenza debole delle derivate, la convessità della Lagrangiana $F(x,u,v)$ rispetto alla variabile v sia in qualche modo essenziale per la semicontinuità, dall'altro si possa usare la convergenza forte per le funzioni, e dunque limitarsi a supporre la sola continuità rispetto alla variabile u.

4.3. Teorema di semicontinuità di De Giorgi.

Iniziamo con un primo risultato in cui la Lagrangiana F è assunta molto regolare.

Proposizione 4.3.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso $(N \geq 1)$ e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ $(\nu \geq 1)$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x,u,v)$ e $F_v(x,u,v)$ (cioè $F_{v^i}(x,u,v)$, $i = 1,\ldots,\nu$) sono continue in $\Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu$;*
(ii) *$F(x,u,v) \geq 0$;*
(iii) *$v \mapsto F(x,u,v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.*

Allora il funzionale $\mathcal{F}[u,v]$ è per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1_{forte}(\Omega', M) \times L^1_{debole}(\Omega', \mathbb{R}^\nu)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, M)$ [1], $u_h \to u$ in $L^1(\Omega, M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Sia $\Omega' \subset \subset \Omega$. Per i teoremi di Severini-Egorov 1.1.14, di Lusin 1.1.15 e dell'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ con $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ tale che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε, u e v sono continue in K_ε e

$$\int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx + O(\varepsilon).$$

[1] $u \in L^1(\Omega, M)$ significa che $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $u(x) \in M$ per q.o. $x \in \Omega$.

Per l'ipotesi (iii) di convessità di F in v, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v_h)\,dx &\geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v)\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x,u_h,v)\,(v_h^i - v^i)\,dx \\ &= \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v)\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_{v^i}(x,u,v)}_{\text{limitata}}\,(v_h^i - v^i)\,dx \\ &+ \int_{K_\varepsilon} \underbrace{[F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)]}_{\to 0}\,(v_h^i - v^i)\,dx.\end{aligned}$$

Se si passa al limite per $h \to +\infty$, il primo integrale a secondo membro tende a $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx$ in virtù della continuità di $F(x,\cdot,v)$ e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε.
Dall'ipotesi (i), poiché u e v sono continue su K_ε, risulta $F_{v^i}(x,u,v)$ limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x,u,v)\,(v_h^i - v^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché le funzioni $(v_h^i - v^i)$ sono equilimitate in norma $L^1(\Omega')$ e $F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$, abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} [F_{v^i}(x,u_h,v) - F_{v^i}(x,u,v)]\;(v_h^i - v^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva abbiamo

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,v_h)\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,v)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx + O(\varepsilon).$$

Poiché $F \geq 0$ ed essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega} F(x,u_h,v_h)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx;$$

prendendo l'estremo superiore al variare di $\Omega' \subset\subset \Omega$, otteniamo la tesi. $\square$

Per indebolire l'ipotesi (i) di continuità per F e F_v richiesta nella proposizione 4.3.1, premettiamo i seguenti lemmi.

Lemma 4.3.2. *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ aperto, con $|\Sigma| < +\infty$, e sia $\{v_h\}$ una successione convergente debolmente in $L^m(\Sigma)$ $(m > 1)$ a una funzione v. Posto, per $L > 0$,*

$$v^L := \begin{cases} v & \text{se } |v| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases},$$

si ha che per ogni intero L esistono una sottosuccessione $\{v_{h_j}\}$ e una funzione z^L tale che $v_{h_j}^L \rightharpoonup z^L$ in $L^2(\Sigma)$. Inoltre, per $L \to +\infty$, la successione $\{z^L\}$ tende a v in $L^1(\Sigma)$.

Dim. La successione $\left\{v_h^L\right\}$ è limitata, quindi lo è, in particolare, in $L^2(\Sigma)$, perché $\left|v_h^L\right| \leq L$ e $|\Sigma| < +\infty$; allora da essa possiamo estrarre una sottosuccessione (che indichiamo per brevità con $\left\{v_h^L\right\}$) debolmente convergente ad una funzione $z^L \in L^2(\Sigma)$. Questo è possibile perché $L^2(\Sigma)$ è uno spazio di Hilbert, quindi riflessivo.
Sia ora $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e poniamo $\Sigma_{h,L} := \{x \in \Sigma : |v_h(x)| > L\}$. Abbiamo:

$$\int_\Sigma \left(v_h - v_h^L\right) \varphi \, dx = \int_{\Sigma_{h,L}} v_h \varphi \, dx \leq \sup_\Sigma |\varphi| \int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx. \tag{4.38}$$

Per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2 abbiamo:
$|\Sigma_{h,L}| \leq \left(\dfrac{\|v_h\|_{L^m(\Sigma)}}{L}\right)^m \leq cL^{-m}$, essendo $\|v_h\|^m_{L^m(\Sigma)} \leq c$ (indipendente da h) poiché v_h converge debolmente in $L^m(\Sigma)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx \leq |\Sigma_{h,L}|^{1-\frac{1}{m}} \|v_h\|_{L^m(\Sigma)} .$$

In conclusione possiamo asserire che, fissato $\varepsilon > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| \, dx$ può essere reso minore di ε prendendo L sufficientemente grande ma indipendente da h. A questo punto in (4.38) passiamo al limite per $h \to +\infty$ e, tenendo conto che $v_h \to v$ e che $v_h^L \to z^L$, otteniamo

$$\int_\Sigma \left(v - z^L\right) \varphi \, dx \leq \varepsilon \sup |\varphi|$$

per ogni $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e per $L > L(\varepsilon)$.
Scelta ora $\varphi = H\left(v - z^L\right)$ dove H è la funzione di Heaviside, risulta:

$$\int_\Sigma \left|v - z^L\right| \, dx \leq \varepsilon \qquad \forall L > L(\varepsilon).$$

Pertanto $z^L \to v$ in $L^1(\Sigma)$. □

Lemma 4.3.3. *Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $M \subset \mathbb{R}^N$ chiuso e sia $F : K \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x,u,v)$ è continua in $K \times M \times \mathbb{R}^\nu$;*
(ii) *$F(x,u,v) \geq 0$;*
(iii) *$v \mapsto F(x,u,v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per ogni $(x,u) \in K \times M$.*

Se $u_h \rightrightarrows u$ in K e $v_h \rightharpoonup v$ in $L^m(K,\mathbb{R}^\nu)$, con $m > 1$, risulta

$$\int_K F(x,u,v) \, dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_K F(x,u_h,v_h) \, dx.$$

Dim. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che la successione degli integrali $\int_K F(x, u_h, v_h)\, dx$ abbia limite.
Sia $\sup_h \|u_h\|_{L^\infty(K,M)} \leq R$ e sia $M_R = M \cap \overline{B}_R$. Dalla proposizione 4.2.2 e dal lemma 4.3.2 deduciamo

$$\int_K F(x, u, v)\, dx \leq \liminf_{L \to +\infty} \int_K F(x, u, z^L)\, dx \tag{4.39}$$

e

$$\int_K F(x, u, z^L)\, dx \leq \liminf_{h \to +\infty} \int_K F(x, u, v_h^L)\, dx. \tag{4.40}$$

D'altra parte, poiché $F \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_K F(x, u, v_h^L)\, dx &= \int_K F(x, u_h, v_h^L)\, dx + \int_K \left[F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)\right]\, dx \\
&= \int_{K \setminus K_{h,L}} F(x, u_h, v_h)\, dx + \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0)\, dx \\
&\quad + \int_K \left[F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)\right]\, dx \\
&\leq \int_K F(x, u_h, v_h)\, dx + \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0)\, dx \\
&\quad + \int_K \left[F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)\right]\, dx
\end{aligned} \tag{4.41}$$

dove $K_{h,L} := \{x \in K : \ |v_h(x)| > L\}$.
Per $h \to +\infty$ il terzo integrale nell'ultimo membro di (4.41) tende a zero poiché F è uniformemente continua sul compatto $K \times M_R \times \overline{B}_L^\nu$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K.
Per il secondo integrale sempre nell'ultimo membro di (4.41) abbiamo la maggiorazione indipendente da h:

$$\begin{aligned}
\int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0)\, dx &\leq \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot |K_{h,L}| \\
&\leq \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot \left(\frac{\sup_h \|v_h\|_{L^m(K,\mathbb{R}^\nu)}}{L} \right)^m,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2. In definitiva, da (4.40), (4.41) e (4.42), otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_K F(x, u, z^L)\, dx &\leq \liminf_{h \to +\infty} \int_K F(x, u_h, v_h)\, dx \\
&\quad + \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot \left(\frac{\sup_h \|v_h\|_{L^m(K,\mathbb{R}^\nu)}}{L} \right)^m,
\end{aligned}$$

da cui la tesi per $L \to +\infty$, tenuto conto di (4.39). $\square$

A questo punto passiamo a dimostrare il teorema principale di questo capitolo.

Teorema 4.3.4 (semicontinuità inferiore, De Giorgi, 1968 [**23**]). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso $(N \geq 1)$ e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ $(\nu \geq 1)$ una Lagrangiana tale che*

(i) *$F(x,u,v)$ è di Carathéodory (cioè misurabile in x per ogni $(u,v) \in M \times \mathbb{R}^\nu$ e continua in (u,v) per q.o. $x \in \Omega$);*
(ii) *$F(x,u,v) \geq 0$;*
(iii) *$v \mapsto F(x,u,v)$ è convessa in $\mathbb{R}^\nu$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u,v] = \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega,M) \times L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ dove $L^1(\Omega,M)$ è dotato della topologia forte e $L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ è dotato della topologia debole.
(i.e. se $\{u_h\}$, $u \in L^1(\Omega,M)$ e $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega,M)$ e se $\{v_h\}$, $v \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ e $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$, allora

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u,v] &= \int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx \\ &\leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_h(x),v_h(x))\,dx = \liminf_{h\to\infty} \mathcal{F}[u_h,v_h]).\end{aligned}$$

Dim. Siano $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega,M)$, $u_h \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$. Possiamo supporre (a meno di estratte) che esista

$$\lim_{h\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_h,v_h)\,dx =: \lambda$$

e che $u_h \to u$ q.o. in Ω.

Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\Sigma \subset \Omega'$ e $|\Sigma| < \delta_\varepsilon$ allora risulta [2] $\int_\Sigma F(x,u,v)\,dx < \varepsilon$.

[2]Se $\int_{\Omega'} F(x,u,v)\,dx = +\infty$, $\int_{\Omega'\setminus\Sigma} F(x,u,v)\,dx > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dai teoremi di Lusin 1.1.15 e di Severini-Egorov 1.1.14 e dal teorema di Scorza Dragoni 1.1.16 abbiamo che esistono un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ e un numero reale $R > 0$, tali che $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$ e

a. $u_h, u \in C^0(K_\varepsilon, M)$, $\sup\limits_{K_\varepsilon} |u| \leq R$, $\sup\limits_{K_\varepsilon} |u_h| \leq R$;
b. $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε;
c. $F(x, u, v)$ ha restrizione continua in $K_\varepsilon \times M \times \mathbb{R}^\nu$.

Dal lemma 4.3.3 otteniamo

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx \leq \liminf_{h \to +\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v_h)\, dx \leq \lambda$$

e quindi [3]

$$\int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx < \lambda + \varepsilon$$

(infatti, poiché $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$, risulta $\int_{\Omega' \setminus K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx < \varepsilon$ e quindi

$$\int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx = \int_{\Omega' \setminus K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx + \int_{K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx < \varepsilon + \lambda \quad).$$

Ciò implica, poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, che $\displaystyle\int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx \leq \lambda$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$, e dunque la tesi. $\square$

Osservazione 4.3.5. Nel teorema 4.3.4 possiamo indebolire ulteriormente l'ipotesi (i) richiedendo:

(i') $x \mapsto F(x, u, v)$ è misurabile per ogni (u, v) e
$u \mapsto F(x, u, v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$,

in quanto con l'ipotesi (iii) di convessità in v, deduciamo che $(u, v) \mapsto F(x, u, v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ [4].

In particolare dal teorema 4.3.4 segue il seguente risultato di debole semicontinuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$.

[3] Se $\displaystyle\int_{\Omega'} F(x, u, v)\, dx = +\infty$ risulta $\dfrac{1}{\varepsilon} < \displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v)\, dx \leq \lambda$ e dunque $\lambda = +\infty$.

[4] Lemma. Sia $f(u, v)$ continua rispetto ad $u \in \mathbb{R}^N$ per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$ e convessa rispetto a $v \in \mathbb{R}^\nu$ per ogni $u \in \mathbb{R}^N$. Allora f è continua in v uniformemente rispetto ad u e quindi è continua globalmente in $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$.

Corollario 4.3.6 (semicontinuità inferiore).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) aperto limitato e* $M \subseteq \mathbb{R}^N$ *(*$N \geq 1$*) chiuso e sia* $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n \times N} \to \mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che*

(i) $F(x, u, p)$ *è di Carathéodory;*
(ii) $F(x, u, p) \geq 0$*;*
(iii) $p \mapsto F(x, u, p)$ *è convessa in* $\mathbb{R}^{n \times N}$ *per q.o.* $x \in \Omega$ *e per ogni* $u \in M$*.*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,1}_{loc}(\Omega, M)$*.*

Dim. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana e sia $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(\Omega', M)$. Allora, per il corollario 1.3.20 del teorema di Rellich-Kondrachov, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', M)$. Scegliendo $v_h = \nabla u_h$ nel teorema 4.3.4, otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 4.3.7. Se l'aperto Ω non è limitato, il teorema 4.3.4 e il corollario 4.3.6 continuano a sussistere, osservato che

$$\begin{aligned} \liminf_{h \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_h, v_h)\, dx &\geq \liminf_{h \to +\infty} \int_{\Omega \cap B_R} F(x, u_h, v_h)\, dx \\ &\geq \int_{\Omega \cap B_R} F(x, u, v)\, dx \end{aligned}$$

e passando poi al limite per $R \to +\infty$.

Osservazione 4.3.8. Usando la disuguaglianza di Hölder e l'osservazione 4.3.7 segue che nel teorema 4.3.4 alla topologia
$L^1_{\rm loc}(\Omega, M)_{\rm forte} \times L^1_{\rm loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\rm debole}$ si può sostituire quella di
$L^t_{\rm loc}(\Omega, M)_{\rm forte} \times L^m_{\rm loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)_{\rm debole}$ con $t \geq 1$ ed $m > 1$ e supporre, al posto della condizione (ii) $F(x, u, v) \geq 0$, la condizione più generale

$$F(x, u, v) \geq -c \left(|v|^r + |u|^t \right) - h(x)$$

con $h \in L^1(\Omega)$, $c > 0$ ed $1 \leq r < m$.

4.4. Teorema di semicontinuità di Ioffe.

Generalizzazione del precedente teorema 4.3.4 è il seguente risultato che per brevità riportiamo senza dimostrazione (cfr. [**45**]).

Teorema 4.4.1 (semicontinuità inferiore, Ioffe, 1977 [**5**] [**6**]).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) aperto e sia*
$F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ *(*$N, \nu \geq 1$*) una Lagrangiana tale che*

(i) $F(x,u,v)$ *è* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^\nu)$*-misurabile* [5] *e per* $\mathcal{L}^n$ *q.o.* $x\in\Omega$ $\quad (u,v)\mapsto F(x,u,v)$ *è s.c.i. in* $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^\nu$ *(cioè* F *è una funzione normale);*

(ii) $F(x,u,v)\geq 0$*;*

(iii) $v\mapsto F(x,u,v)$ *è convessa in* $\mathbb{R}^\nu$ *per* $\mathcal{L}^n$ *q.o.* $x\in\Omega$ *e per ogni* $u\in\mathbb{R}^N$.

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u,v]=\int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ *dove* $L^1(\Omega,R^N)$ *è dotato della topologia forte e* $L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$ *è dotato della topologia debole (i.e. se* $\{u_h\}\,,\ u\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$*,* $u_h\to u$ *in* $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$
e se $\{v_h\}\,,\ v\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$*,* $v_h\rightharpoonup v$ *in* $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$*, allora*

$$\int_\Omega F(x,u(x),v(x))\,dx\leq\liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega F(x,u_h(x),v_h(x))\,dx\quad).$$

In [**45**] è anche provato che la semicontinuità di $(u,v)\mapsto F(x,u,v)$ e la convessità di $v\mapsto F(x,u,v)$ sono necessarie per la s.c.i..

Esempio 4.4.2 (Ioffe, 1977). *Il teorema di semicontinuità inferiore 4.3.4 esteso come espresso nell'osservazione 4.3.8, non sussiste per* $r=m$*, nemmeno in dimensione uno.*

Per dimostrare ciò, consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}[u,v]=\int_0^1\left(\left|\frac{u}{x}\right|^{m'}\cdot\frac{1}{m'}+\frac{u}{x}\,v\right)dx,$$

e le successioni

$$u_h(x)=\begin{cases} x\,h^{1/m'} & \text{se } 0<x<\dfrac{1}{h}\\[2ex] 0 & \text{se } \dfrac{1}{h}\leq x<1,\end{cases}$$

$$v_h(x)=\begin{cases} -h^{1/m} & \text{se } 0<x<\dfrac{1}{h}\\[2ex] 0 & \text{se } \dfrac{1}{h}\leq x<1.,\end{cases}$$

$\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m'}=1\right)$.

Risulta $F(x,u,v)\ \geq\ -\dfrac{|v|^m}{m}$ (in quanto per la disuguaglianza di Young

[5] $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ indica la σ-algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ indica la σ-algebra dei sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}^k$.

$|v|\left|\frac{u}{x}\right| \leq \frac{|v|^m}{m} + \left|\frac{u}{x}\right|^{m'} \cdot \frac{1}{m'}$), e inoltre $u_h \rightrightarrows 0$, e $v_h \rightharpoonup 0$ in $L^m((0,1))$.
D'altra parte $\mathcal{F}[0,0] = 0$, mentre $\mathcal{F}[u_h, v_h] = -\frac{1}{m}$.

4.5. Teorema di esistenza e unicità dei minimi per problemi variazionali.

Vediamo come il corollario 4.3.6 di semicontinuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ con Lagrangiana $F : \Omega \times M \times R^{n\times N} \to \mathbb{R}$ può essere utilizzato per dimostrare l'esistenza di minimi per $\mathcal{F}[\cdot]$.
Per il teorema di Weierstrass-Fréchet 3.1.1 sarà sufficiente provare che esiste una successione minimizzante che converge nella topologia debole di $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$. Lo spazio $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ non è riflessivo e quindi in generale poco adatto allo scopo; tuttavia, poiché una successione che converge debolmente in $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$ $(m > 1)$ è anche debolmente convergente in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, M)$, sarà sufficiente trovare una successione minimizzante che converge debolmente in $W^{1,m}_{loc}(\Omega)$ per qualche $m > 1$. Poiché quest'ultimo è uno spazio riflessivo, basterà trovare una successione minimizzante limitata in $W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per qualche $m > 1$.
Sussiste il seguente risultato (più generale del teorema 3.3.2).

Teorema 4.5.1 (esistenza per il problema di Dirichlet).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ chiuso e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ sia seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, M)$, $m > 1$ [6].
Sia inoltre $F(x,u,p) \geq c|p|^m$ $(c = costante > 0, m > 1)$ per ogni (x,u,p) (cioè $F(x,u,p)$ ha crescita superlineare per $|p| \to +\infty$).
Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{u \in W^{1,m}(\Omega, M),\ \ u - \varphi \in W^{1,m}_0(\Omega, M)\right\}$$

assegnata $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, M)$ con $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$.

Dim. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 3.3.2. □

[6] Per questo è sufficiente che la Lagrangiana soddisfi le condizioni (i), (ii) e (iii) del corollario 4.3.6

In generale si può richiedere di trovare il minimo del funzionale $\mathcal{F}[\cdot]$ tra tutte le funzioni che verificano opportune condizioni (non necessariamente di tipo Dirichlet), o, se si vuole, che appartengono ad un sottoinsieme $\mathcal{A}$ (in generale non sequenzialmente compatto) dello spazio $W^{1,m}(\Omega, M)$. $\mathcal{A}$ dovrà essere chiuso nella topologia debole di $W^{1,m}(\Omega, M)$ se si vuole che il limite di una successione di funzioni di $\mathcal{A}$ appartenga ad $\mathcal{A}$, o in altre parole che il limite verifichi le condizioni richieste.

Il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni è basato sul seguente teorema.

Teorema 4.5.2 (esistenza).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ *aperto,* $M \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *chiuso e sia* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$ *un funzionale seq. deb. s.c.i. in* $W^{1,m}_{loc}(\Omega, M)$, $m > 1$. *Sia* $\mathcal{A}$ *un sottoinsieme debolmente chiuso di* $W^{1,m}(\Omega, M)$, *e supponiamo che*

$$\lim_{\substack{\|u\|_{W^{1,m}(\Omega,M)} \to +\infty \\ u \in \mathcal{A}}} \mathcal{F}[u] = +\infty$$

(cioè $\mathcal{F}[\cdot]$ *sia coercivo in* $\mathcal{A}$*).*
Allora $\mathcal{F}[\cdot]$ *ammette minimo in* $\mathcal{A}$.

Osservazione 4.5.3. In sintesi, da quanto visto emerge che la *convessità* è usata per dimostrare la *debole semicontinuità inferiore*, mentre la *coercività* garantisce la *compattezza*.
Possiamo schematizzare con le implicazioni

(convessità + forte s.c.i.)
$\Downarrow$
DEB. S.C.I. + COERCIVITÀ $\Rightarrow$ ESISTENZA DEI MINIMI.
$\Downarrow$
(compattezza)

In generale possono esistere più minimi, pertanto per assicurare l'unicità richiediamo ulteriori ipotesi.
Sussiste il seguente risultato:

Teorema 4.5.4 (unicità dei minimi).
Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ *una Lagrangiana tale che* $F = F(x,p) \in C^2\left(\Omega \times \mathbb{R}^{n\times N}\right)$ *(F non dipendente da u); supponiamo inoltre che* $p \mapsto F(x,p)$ *sia uniformemente convessa per ogni* $x \in \Omega$. *Allora se esiste un minimo* $u \in \mathcal{A}_\varphi$ *di* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_\Omega F(x, \nabla u(x))\, dx$ *esso è unico.*

Dim. Siano $u, \widetilde{u}$ entrambi minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$ in $\mathcal{A}_\varphi$. Allora $v := \dfrac{u+\widetilde{u}}{2} \in \mathcal{A}_\varphi$. Per l'ipotesi di uniforme convessità esiste $\theta > 0$ tale che

$$F_{p_\alpha\, p_\beta}(x,p)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta \geq \theta|\xi|^2 \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega),$$

pertanto

$$F(x,p) \geq F(x,q) + F_p(x,q)\cdot(p-q) + \frac{\theta}{2}\,|p-q|^2 \quad (p, q \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega).$$

Posto $q = \dfrac{\nabla u + \nabla\widetilde{u}}{2}$, $p = \nabla u$, e integrando su Ω abbiamo

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p\left(x, \frac{\nabla u + \nabla\widetilde{u}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\nabla u - \nabla\widetilde{u}}{2}\right)\,dx + \frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u - \nabla\widetilde{u}|^2\,dx.$$

Analogamente, posto $q = \dfrac{\nabla u + \nabla\widetilde{u}}{2}$, $p = \nabla\widetilde{u}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[\widetilde{u}] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p\left(x, \frac{\nabla u + \nabla\widetilde{u}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\nabla\widetilde{u} - \nabla u}{2}\right)\,dx + \frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u - \nabla\widetilde{u}|^2\,dx.$$

Sommando e dividendo per 2, deduciamo che

$$\frac{\mathcal{F}[u] + \mathcal{F}[\widetilde{u}]}{2} \geq \mathcal{F}[v] + \frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u - \nabla\widetilde{u}|^2\,dx.$$

Poiché $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[\widetilde{u}] = \min_{w\in\mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[w] \leq \mathcal{F}[v]$, deduciamo che $\nabla u = \nabla\widetilde{u}$ q.o. in Ω. Per la disuguaglianza di Poincaré 1.3.7, segue che $u = \widetilde{u}$ q.o. in Ω. □

4.6. Un risultato di esistenza nella teoria del controllo ottimo.

I Problemi di controllo ottimo (cfr. ad esempio [**50**]) sono problemi di minimo che descrivono il comportamento di sistemi che possono essere modificati dall'azione di un operatore; pertanto è presente una coppia di variabili (u, v): una, la *variabile di stato* u descrive lo stato del sistema e non può essere modificata dall'azione diretta dell'operatore, invece l'altra, la *variabile di controllo* v, è sotto il controllo diretto dell'operatore che, per raggiungere un fissato obiettivo, può scegliere la strategia tra quelle ammissibili, operando sulla variabile di controllo attraverso una *equazione di stato*.
Lo scopo è perseguito attraverso un problema di minimo di un *funzionale costo* che dipende da (u, v).
Diamo qui un esempio di applicazione del teorema di s.c.i. 4.3.4 in teoria dei controlli.

Esempio 4.6.1. *Sia (il funzionale di costo totale)*

$$\mathcal{F}[u,v] := \int_\Omega |v(x)|^2\,dx + \int_\Omega g\,(u(x) - U(x))\,dx,$$

dove Ω *è un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *con frontiera lipschitziana,* U *rappresenta uno "stato obiettivo" e* $g \geq 0$ *è continua.*
Supponiamo che per mezzo della funzione di controllo v*, il conseguente* stato u *sia governato dall'*equazione di stato

$$\begin{cases} \Delta u = v & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \partial\Omega. \end{cases}$$

L'integrale $\displaystyle\int_\Omega |v(x)|^2\, dx$ *può interpretarsi come il costo del controllo* v*, mentre l'integrale* $\displaystyle\int_\Omega g\,(u(x) - U(x))\, dx$ *rappresenta il prezzo da pagare se non si raggiunge lo stato obiettivo* U*.*
Consideriamo allora il problema

$$\min_{(u,v)\in W^{2,2}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{\mathcal{F}\,[u,v]\,;\ \Delta u = v\ \ in\ \Omega,\ u = 0\, su\ \partial\Omega\right\}.$$

Per il teorema 4.3.4 il funzionale $\mathcal{F}$ *è s.c.i. per la convergenza debole in* v *e forte in* u *in* $L^2(\Omega)$*.*
Sia $\{v_h\}$ *una successione minimizzante di controlli e sia* $\{u_h\}$ *la corrispondente successione degli stati.*
Dalla teoria delle equazioni ellittiche (cfr. [**37**] *cap. 10)* $\{u_h\} \subset W^{2,2}(\Omega)$ *e*

$$\|u_h\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c\,\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad per\ ogni\ h \in \mathbb{N}.$$

Dalla limitatezza di $\{v_h\}$ *in* $L^2(\Omega)$ *segue la limitatezza in* $W^{2,2}(\Omega)$ *di* $\{u_h\}$*, pertanto (passando eventualmente ad una sottosuccessione) possiamo supporre che* $u_h \to u^0$ *e* $v_h \rightharpoonup v^0$ *in* $L^2(\Omega)$*. Per il teorema 4.3.4* (u^0, v^0) *è la coppia minimizzante e* v^0 *è il controllo ottimale.*